ἔλεγχος
Volumen 7, Nº 1
Marzo 2024
ISSN: 2393-6819

PROBLEMAS, PROCEDIMENTOS E INDESPENSABILIDADE DA SOBREPOSIÇÃO NAS PROVAS DE CONGUÊNCIA DE TRIÂNGULOS EM I.4 E I.8 DOS *ELEMENTOS* DE EUCLIDES

PROBLEMS, PROCEDURES AND INDESPENSABILITY OF SUPERPOSITION IN THE PROOFS OF CONGRUENCE OF TRIANGLES IN I.4 AND I.8 OF EUCLID'S *ELEMENTS*

Wagner Sanz
Faculdade de Filosofia, UFG, Campus Samambaia, Goiânia, GO, Brasil
wsanz@ufg.br

Petrúcio Viana
Instituto de Matemática e Estatística, UFF, Niterói, RJ, Brasil
petrucio_viana@id.uff.br

Recibido: 14/11/2023
Aceptado: 13/12/2023

Resumo: O LIVRO I dOS ELEMENTOS DE EUCLIDES começa com três *propositiones* que pedem a solução de três problemas. Diferente do que acontece em outras *propositiones*, elas não constituem uma asserção de propriedades ou relações entre objetos geométricos. Nelas pedem-se ações cuja execução geram objetos geométricos. As *propositiones* que demandam a obtenção de um objeto geométrico são via de regra apresentadas como problemas. Sua resolução vem normalmente acompanhada da resolução de um segundo problema: o problema de demonstrar que a solução oferecida anteriormente é correta. Só a partir da quarta *propositio* começarão a aparecer os teoremas dOS ELEMENTOS. Consideraremos a seguir, de modo propedêutico, as implicações de adotar uma abordagem da geometria na qual as *propositiones* sejam interpretadas como problemas, inclusive aquelas lidas como teoremas, e também que a solução de um problema de construção é um procedimento ou algoritmo baseado nos postulados. Finalmente, dentro do arcabouço esboçado, ofereceremos provas alternativas para os dois primeiros teoremas de congruência de triângulos sem apelo algum à afamada operação de sobreposição.

Palavras chave: geometria de Euclides, problemas, superposição.

Abstarct: The BOOK I of EUCLIDES'S ELEMENTS begins with three propositions that ask the solution to three problems. Unlike what happens in other propositions, they do not constitute an assertion of properties or relations between geometric objects. Instead, they request actions whose execution generates geometric objects. The propositions that demand the obtaining of a geometric object are typically presented as problems. Their resolution is normally accompanied by the solution of a second problem: the problem of demonstrating that the previously offered solution is correct. Only from the fourth proposition onwards will the theorems of the ELEMENTS begin to appear. Next, we will consider, in a preliminary manner, the implications of adopting an approach to geometry in which propositions are interpreted as problems, including those read as theorems, and also that the solution to a construction problem is a procedure or algorithm based on the postulates. Finally, within the outlined framework, we will offer alternative proofs for the first two triangle congruence theorems without any appeal to the famous operation of superposition.

Keywords: Euclid's geometry, problems, superposition.

1) Introdução

> *"... this science is in direct contradiction with the language employed in it by its adepts". "How so?" he said. "Their language is most ludicrous, though they cannot help it, for they speak as if they were doing something and as if all their words were directed towards action. For all their talk is of squaring and applying and adding and the like, whereas in fact the real object of the entire study is pure knowledge. ... "for geometry is the knowledge of the eternally existent." Platão Republica VII 527a-b.*

> *Les désaccords portent sur des questions fondamentales, à la fois philosophiques et techniques : de quelle(s) manière(s) doit-on définir les objets géométriques fondamentaux ? Ce qui renvoie aussi bien au statut philosophique que l'on reconnaît aux dits objets et à la science qui en traite qu'aux procédures effectivement utilisables. Quelle est la signification des constructions? Comment faut-il interpréter les différences qu'il y a entre certains types d'assertions comme les problèmes et les théorèmes, les postulats et les axiomes ... ? Faut-il accorder ou non une certaine place au mouvement en géométrie? Vitrac p.6 Quelque Remarques ... sur Ummar Kayam.*

Os Livros dOs Elementos de Euclides, III século a.C., apresentam o conhecimento matemático por meio de *propositiones* ou *protaseis*. Estão divididas em dois grandes grupos: problemas e teoremas. A Prop. I.1 - construir um triângulo equilátero - é o primeiro exemplo de um problema:

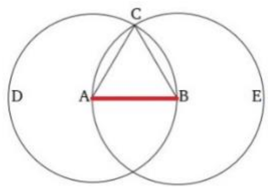
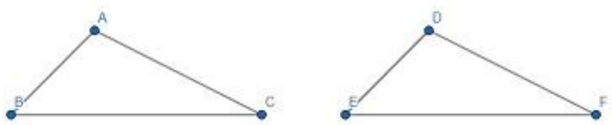


Figura 1

A Prop. I.4 - provar que dois triângulos são iguais quando têm dois lados iguais a dois e



o ângulo entre eles também - é o primeiro exemplo de um teorema:

Figura 2

Conforme a citação mais acima, Platão na *República* critica os termos de ação usualmente empregados para formular princípios e conhecimentos matemáticos, oferecendo assim prova cabal de que o uso desses termos era moeda corrente muito antes de Euclides. Aliás, seguirão sendo, bem depois de Platão, nos textos de algum modo baseados nOS ELEMENTOS, o que fica evidente já na PROP. I.1 cuja formulação *pede*: *Construir um triângulo equilátero sobre a reta limitada dada*.[1]

Nosso objetivo, no presente texto, é o de explorar muito brevemente as consequências que poderíamos extrair da adoção de uma perspectiva interpretativa da *Geometria de Euclides* que considerasse todas as *propositiones* como problemas. Para uma abordagem que defende a tese de que os problemas de construção devem ser tomados como o núcleo da investigação na história da geometria antiga ver [Kno45].

No século XIX, Hilbert, nos seus *Fundamentos da Geometria* [Hil50], efetuou uma reformulação da disciplina na qual, podemos dizer, todas as *propositiones* foram transformadas em teoremas. Em primeiro lugar, isso levou a uma eliminação do vocabulário de ação criticado por Platão. Em segundo lugar, essa eliminação se deu pela substituição dessas expressões pelo uso de uma interpretação existencial dos postulados e das construções presentes na *Geometria de Euclides*. Por exemplo, ao passo que o POSTULADO 1 do LIVRO I está formulado como: *Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto*; o AXIOMA I.1 de Hilbert versa que: *Dois pontos diferentes* A *e* B *sempre determinam* uma reta ... . Aqui, o termo *determinam* significa simplesmente *determinam a existência de*.

Levar a termo uma interpretação da *Geometria de Euclides* que respeite esse vocabulário de ação, não obstante Platão, é, portanto, um exercício que se apresenta como evidente e está ali a desafiar a nossa imaginação por mais de dois mil anos. O filósofo da Academia poderá ter tido várias razões para rejeitar essa linguagem, mas os antigos, alguns deles seus contemporâneos, poderiam também ter tido razões para usá-la e ela bem pode ter sido uma prática comum. Embora a história da disciplina tenha se dirigido para a versão platônica, isso não significa que lá na origem não houvesse uma abordagem alternativa com algum nível de coerência, usando uma linguagem na qual os termos de ação faziam sentido, mesmo que seu alcance fosse limitado.

O que chamamos de *Geometria de Euclidiana* hoje é, na verdade, a resultante histórica de uma interpretação platonizante da *Geometria de Euclides* - aquela contida no texto desse autor do III século a.C. - e segundo a qual o conhecimento geométrico é visto como uma coleção de *afirmações* divididas em axiomas e teoremas, como em Hilbert [Hil50]. Todavia, é bastante questionável que originalmente esse fosse o caso. Aliás, o próprio texto dOS ELEMENTOS de que hoje dispomos é resultado de um esforço titânico de reconstrução do original baseado na seleção de alguns manuscritos antigos e resulta, portanto, ser um objeto altamente hipotético. De modo geral os manuscritos são cópias de cópias e não conseguimos retroceder com segurança muito além do IV século d.C., a época de Téon, pai de Hipátia, como fonte desses manuscritos.

Nossa proposta de abordagem desse texto reconstruído é a seguinte:

> TOMANDO O PUTATIVO TEXTO DE EUCLIDES - BASICAMENTE, AQUELE DE HEIBERG [Bic09], [Fit07], [Hea56], [Vit90] - BUSCAMOS DIVISAR UMA INTERPRETAÇÃO DA GEOMETRIA QUE FAÇA JUSTIÇA AOS TERMOS DE AÇÃO QUE ENCONTRAMOS NELE, POR MEIO DE UMA INTERPRETAÇÃO DE PROBLEMAS, E PROCURAMOS DESCOBRIR O QUE ISSO IMPLICARIA COM RESPEITO A ALGUMAS DE SUAS PRIMEIRAS *PROPOSITIONES* E RESPECTIVAS PROVAS.

Alertamos que nosso objetivo primário não é o de embarcar em uma discussão histórica, ainda que alguns elementos dessa discussão estejam presentes. Temos um objetivo

[1] Tradução de Bicudo [Bic09] p. 98.

especulativo mais simples, uma investigação da interpretação com base em problemas que procure dar sentido a todos os termos de ação. E, caso isso se mostre viável, empreender em um segundo momento investigação histórica mais detalhada. No entanto, com o fim de motivar o avanço da referida interpretação, examinaremos ao final do texto algumas consequências iniciais dessa proposta para a *Geometria de Euclides*. O resultado para as primeiras *propositiones* do LIVRO I pode ser surpreendente.

2) Problemas e procedimentos

Um *problema* típico requer uma *solução* - ou que se encontre uma solução. A atividade de encontrar ou estabelecer uma solução a um problema será designada como *resolução* do problema. Mas, admitindo que podemos caracterizar classes de problemas estruturalmente similares, os problemas de uma classe poderão ser *descritos de modo genérico* ou *estrutural*. Usaremos a expressão *problema genérico* ou a expressão *problema tipo* para designar essas classes de problemas similares, mas também para designar a estrutura comum dos componentes dessa classe. Admitindo a possibilidade de falar de problemas genéricos, talvez também seja possível encontrar uma solução genérica a qual, por instanciação, resulte em uma solução concreta para cada problema concreto dessa classe. Ora, ao buscar uma solução genérica, o que se deseja exatamente é encontrar um *procedimento* de resolução. Assim, podemos aceitar que a solução ao problema genérico seja confundida com um procedimento de resolução. Ou seja, eventualmente, a atividade de encontrar uma solução genérica poderá ser, ela mesma, a atividade de encontrar um procedimento de resolução. Embora de modo geral isso seja o caso mais raro, esse será o caso na geometria como procuraremos argumentar. Normalmente, a busca de uma solução será apenas uma atividade em que a criatividade e a heurística jogarão um papel importante.

Em resumo, a *solução típica* a um *problema genérico* ou *problema tipo* consistirá em oferecer um *procedimento de resolução*, também ele genérico. Ou seja, um conjunto organizado de ações que nos levariam a uma solução concreta quando o procedimento é instanciado para um caso concreto do mesmo gênero ou tipo. Os problemas geométricos são, por norma, problemas genéricos. Por exemplo, obter o triângulo equilátero correspondente a um dado segmento de reta é a descrição estrutural de muitos problemas concretos distintos.

Um procedimento será constituído por *ações*, que podem ser executadas *em sequência* ou *em paralelo*; por *decisões*, que podem ser certas *escolhas* de acordo com *casos*; e, também, por *reiterações* de certos *subprocedimentos*; formando um todo organizado. Neste artigo, o principal conceito que empregaremos na tentativa de embasar uma nova interpretação da *Geometria de Euclides* é o *conceito de procedimento* - bem como o conceito, a ele associado, de *algoritmo* - que já tínhamos anteriormente relacionado às construções da *Geometria de Euclides* em [San21a]. Conceitualmente, assumiremos que *algoritmos* são procedimentos cuja execução sempre termina. Os conceitos de procedimento e algoritmo serão considerados como básicos para a análise dos problemas de construção e das provas geométricas presentes nOS ELEMENTOS. Mais uma vez salientamos que a investigação aqui conduzida tem caráter especulativo e não constitui uma proposta de tese histórica sobre a geometria.

Por meio dos conceitos de problema, solução, resolução, procedimento e algoritmo, visaremos oferecer uma interpretação ao conceito de ação na forma em que ele aparece no texto dOS ELEMENTOS DE EUCLIDES, sobretudo nos postulados.

2.1) Problemas versus teoremas

É perceptível nos três primeiros postulados e nas três primeiras *propositiones* do LIVRO I dOS ELEMENTOS - e até mesmo na maioria das traduções contemporâneas do texto - que cada uma das frases que os expressam tem um verbo principal no infinitivo. Assim, com respeito à reconstrução de Heiberg do texto de Euclides, uma conclusão é imediata: nenhum dos três primeiros postulados ou das três primeiras *propositiones* iniciais pode constituir uma afirmação. Desse modo, tampouco podem ser chamados corretamente de axiomas ou de teoremas. Ao menos, não podem assim ser chamados na medida em que esses dois conceitos sejam definidos como certas afirmações que expressam relações entre objetos geométricos, básicas e sem prova no caso dos axiomas e complexas mas seguidas de prova no caso dos teoremas.

A construção apresentada em PROP. I.1 é um procedimento de resolução do problema de obter o triângulo equilátero. Para a confecção desse procedimento, recorrer-se-á aos POSTS. 1 e 2, que são, respectivamente, na tradução de Bicudo ([Bic09] p.98): *traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto*; *e, com todo centro e distância, descrever um círculo*. Seus passos geram supostamente o diagrama que ilustraria o texto de Euclides, sendo AB a designação atribuída à reta dada, por hipótese. Eles consistem da seguinte sequência de ações: descrever um primeiro círculo de centro A e raio AB, depois um segundo círculo de centro B e raio BA; a seguir, após escolher um dos pontos onde os dois círculos se cortam, o denominado ponto C, traçar a reta AC e, finalmente, traçar a reta BC. E assim termina o procedimento de construção ou *kataskeue*. Mas isso ainda não constitui o fim da prova de que o problema proposto está resolvido.

Uma forma frequente de entender as ações dos três primeiros postulados consiste em dizer que elas são ações muito simples. E mesmo para aqueles que preferem o ponto de vista platônico, as formulações desses três postulados poderiam ser interpretadas como asserções de existência de objetos dentre os mais básicos.

Mas há um ponto que merece nossa atenção e que por si só sugeriria uma interpretação um pouco diferente de que estaríamos meramente frente a uma demonstração de existência, ou seja, de que os triângulos equiláteros existem no caso da PROP. I.1. Esse tipo de leitura parece frequentemente acompanhar o que estamos chamando de *Geometria Euclidiana* e, a grosso modo, envolve uma leitura existencial dos três primeiros postulados. Como é possível perceber na descrição que fizemos do problema da PROP. I.1 mais acima, usamos o verbo "pede" para explicar aquilo do que trata a referida *propositio* do texto de Euclides. O termo *postulados* corresponde ao termo grego *aitémata* que significa: demandas ou pedidos. Ora, esse fato sugere imediatamente que os postulados podem ser interpretados como problemas, pois o que se estaria a pedir seria uma solução, ou a suposição da posse de uma para alguns poucos problemas que contam entre os mais simples: o de traçar retas e o de traçar círculos, basicamente.

Uma solução pode ser obtida de diferentes modos, sem que se tenha que fixar alguma delas em particular. Para os problemas iniciais, ou postulados, dos quais o texto de Euclides não apresenta solução, bastará desse modo supor a posse de uma ou mais soluções para cada um deles como passo prévio para prosseguir com o estudo da geometria. Assim, desde essa perspectiva, os postulados teriam uma natureza completamente diferente daquela costumeiramente atribuída aos axiomas. Em primeiro lugar, com certeza eles não são asserções, e também não são verdades necessárias. Se compartilham algo com os axiomas[2], é sua relativa simplicidade, pois o problema que envolvem é relativamente fácil de capturar e, até certo ponto, fácil de resolver. Em

[2] Na acepção original do termo.

segundo lugar, eles são de natureza prática, uma vez que são formulados de modo a pedir, ordenar, prescrever, requer, uma ação.

Desse modo, quando o procedimento de construção que resolve o problema da PROP. I.1 apela aos POSTS. 1 e 2 ele estaria, na verdade, desde a nossa perspectiva, *reduzindo* o problema da PROP. I.1 aos problemas dos POSTS. 1 e 2. E, caso possuamos soluções aos problemas dos POSTS. 1 e 2, então claramente obteremos uma solução ao problema da PROP. I.1.

Mas, dizíamos, a solução do problema genérico formulado na PROP. I.1 não está terminada com a obtenção do procedimento de construção do triângulo equilátero com base em um segmento de reta dado AB. É bem verdade que, de um ponto de vista prático, na maioria das vezes, já estaríamos satisfeitos com o fato de obter um procedimento de resolução para um problema. Porém, o pensamento matemático requer garantias extras de que a solução oferecida esteja correta. Provavelmente esse é um dos componentes mais importantes a distingui-lo do pensamento teórico nas outras áreas.

Logo a seguir vemos, pois, na sequência da prova da PROP. I.1, a resolução de um segundo problema de natureza distinta daquele primeiro. Ele contém a resolução de um problema de demonstração ou um problema de *apodeixis*. Esse é um problema que se resolve discursivamente, tomando por base o diagrama gerado, no qual as sentenças são essencialmente assertivas, tal que esse discurso culmina, no caso da PROP. I.1, com a afirmação de que os três lados do triângulo obtido no diagrama são de fato iguais, como havia sido pedido.

Assim, em uma *propositio*-problema, vemos encadearem-se as resoluções de dois problemas, um de construção e outro de demonstração. Essa distinção oferece-nos também uma base para entender os teoremas da *Geometria de Euclides*. Todo teorema constitui em essência um problema de demonstração. E sua resolução - aqui está o fato mais curioso - estará inumeráveis vezes, embora não sempre, composta da resolução de dois problemas em sequência: um problema de construção e um problema de demonstração, similar ao que ocorre em PROP. I.1. Um caso onde isso poderá ser percebido é na nova prova que ofereceremos da PROP. I.8 mais abaixo. Mas também já está presente na prova de I.5.

Portanto, conforme a interpretação baseada em problemas, em sua maioria as *propositiones* da *Geometria de Euclides* são problemas que podem ser alocados em uma de duas categorias: ou em *problemas de construção*, ou em *problemas de demonstração*.

A tese de que todas as *propositiones* da geometria podem ser interpretadas como problemas não é recente, sendo Menêcmo, da Escola de Cízico, na Ásia Menor, um de seus defensores na antiguidade.[3] Contemporaneamente, Knorr [Kno45] é um dos poucos autores que defende a ideia de que os problemas teriam sido o centro da geometria antiga, e inicia o prefácio do seu livro do seguinte modo:

> *Within the ancient geometry, a geometric "problem" seeks the construction of a figure corresponding to a specific description. The solution to any problem requires for its completion an appeal to the constructions in other problems already solved, and in turn will be applied to the solutions of yet others. In effect, then, the corpus of solved problems forms an ordered sequence in which each problem can be reduced to those preceding...*

[3] Ver [Vit90], p. 134-135.

That the ancient problem-solving effort took on such a structure is much what one would expect, given the prominence of the role of "analysis" for discovering and proving solutions; for this method seeks in each case to reduce the stated problem to others already solved. We possess one ancient work, Euclid's Data, which organizes the materials of elementary geometry in this manner...

O viés de leitura contemporâneo que trata todas as *propositiones* como teoremas acaba por ser confundido como parte do espírito original do tratado de Euclides, em particular no âmbito do que estamos chamando aqui de *Geometria Euclidiana*, conforme a distinção feita mais acima. Ela envolve uma *leitura existencial* dos postulados, a qual é dubitável como interpretação d'OS ELEMENTOS. Seu caráter ontológico é marcadamente platônico. Sob ele o POST. 1 significaria tão somente que existe uma única linha reta (infinita) entre dois pontos distintos quaisquer, ao passo que na versão original está empregado um verbo de ação no infinitivo, como já apontamos.

3) Principios e soluções

Uma interpretação baseada em problemas d'OS ELEMENTOS DE EUCLIDES, completa e homogênea, deveria também assumir que a formulação de todos os postulados e noções comuns seja entendida sob essa forma de problemas. A razão é simples, e fácil de apontar para o caso dos três primeiros postulados, aqueles relativos a traçar e estender retas, bem como a descrever círculos. Eles oferecem alguns dos componentes elementares para a resolução das *propositiones*-problema nOS ELEMENTOS. Já os dois últimos postulados, envolvendo os ângulos retos e as paralelas, parecem um pouco distintos dos primeiros. Porém, acreditamos que existem boas razões para interpretá-los como problemas também. Todavia, o escopo deste artigo é bem mais modesto e dessa questão não trataremos em profundidade.

Daremos apenas algumas razões para assumir que os três primeiros postulados podem ser interpretados como problemas. Mas, principalmente, em seguida, teremos em vista examinar algumas consequências que seguem da adoção de uma interpretação de problemas ao quarto postulado, envolvendo a igualdade dos ângulos retos, oferecendo apenas um arrazoado inicial do porquê considerá-lo como tal. Ele será visto como um problema de natureza especial, distinto dos três primeiros. Com respeito ao postulado das paralelas, o quinto, ele não será por agora objeto de nossa atenção, ficando, pois, relegado para um futuro ensaio. O mesmo vale para as noções comuns, embora seu caso seja mais simples de tratar.

Se a resolução de um problema faz apelo a outros problemas dando por suposto que eles estejam resolvidos, então é natural que qualquer *propositio*-problema que suceda à primeira no LIVRO I faça apelo a outras *propositiones*-problema que lhe antecedem, que já tenham sido efetivamente resolvidas, embora o caso dos postulados seja um pouco especial. Imediatamente percebemos que essa cadeia de apelo ao já conhecido deve terminar retroagindo, ao fim e ao cabo, a eles. Assim, interpretar os três primeiros postulados como problemas tem o efeito de tornar completamente homogênea essa cadeia de retroação, ou de análise como parece sustenta Knorr. Todavia, como elementos iniciais, ou finais, da cadeia, tudo depende de como se olha, eles devem ser vistos como problemas de solução hipotética e, assim, ligeiramente diferentes do resto da cadeia, pois OS ELEMENTOS não indicam quais seriam suas resoluções. Portanto, desses problemas iniciais podemos no máximo supor a posse de uma ou mais soluções ou, melhor ainda, de um bloco consistente de soluções para elas. Desde nossa perspectiva, é exatamente isso que Euclides poderia estar pedindo ao início do tratado.

Para traçar uma reta podemos usar régua e lápis, mas também podemos usar um fio de nylon. Para traçar um círculo, podemos usar um compasso rígido com ponta seca, mas também um fio de nylon atado a uma ponta seca. E, claro, sempre surge a objeção de que esses instrumentos concretos produzem objetos físicos que não corresponderiam aos objetos matemáticos. Ora, se não estivermos comprometidos com nenhum deles em particular, então a resolução dos problemas geométricos será em um certo sentido pura, isto é, independente de toda solução concreta para os problemas postulados. Por outro lado, sob este ponto de vista, claramente a ontologia platônica não seria a ontologia básica dOs ELEMENTOS. Esse tema, porém, também não será aprofundado aqui, e dele daremos apenas algumas leves pinceladas. Enquanto os postulados descrevem ações, os objetos sobre os quais a *Geometria de Euclides* fixa sua atenção são os traços dessas ações, ou seja, os diagramas entendidos como conjuntos de traços das ações postuladas.

3.1) Os postulaos 1, 2 e 3

Os três primeiros postulados do LIVRO I dOs ELEMENTOS, ao serem lidos como problemas, deveriam ser entendidos, segundo a perspectiva que queremos apresentar, da seguinte forma:[4]

1) [Como?] levar uma reta de qualquer ponto até qualquer ponto[5]
2) e [Como?] prolongar uma reta limitada, continuamente, em uma reta[6]
3) e [Como?], com qualquer centro e intervalo, riscar um círculo[7]

A questão *Como?* não costuma ser diretamente formulada nas traduções de cada um dos postulados. No entanto, como é de conhecimento geral, os postulados são apresentados como: *aitémata*. E, supostamente, essa expressão significaria *aquilo que é pedido*. Adicionalmente, o POST. 1 é de fato introduzido com o verbo *heitésthō* - algo como *seja perguntado* ou *seja pedido*. Ora, demandar que se resolva um problema é com certeza um pedido. Assim, a interpretação com a pergunta *Como?* é compatível com o texto de Euclides e, desse modo, adicionaria precisão à leitura. A demanda, nesse caso, teria um caráter especial desde a perspectiva que estamos propondo: o de que se faça a suposição de ter a solução ao problema.

É preciso destacar que cada um desses postulados é formulado com um verbo no infinitivo. E, seguindo o Platão da República, conforme a citação inicial, consideramos esses verbos como a expressão de uma ação. Assim, ao interpretar os três primeiros postulados como problemas estamos a perguntar como as respectivas ações podem ser efetuadas. Note-se que essas questões não estão respondidas no texto de Euclides. Assim, como não são apresentadas as formas pelas quais se resolve cada um dos problemas iniciais postulados, na interpretação sugerida isso equivaleria a pedir que *se faça a suposição de que estamos de posse de ao menos uma das soluções ao problema*.

[4] Usamos parcialmente a tradução de Bicudo [Bic09], p. 98.
[5] Preferimos utilizar, diferentemente de Bicudo, o verbo *levar* ao invés do verbo *traçar* e o quantificador *qualquer* em vez do *todo*, uma vez que ambos se ajustam melhor à interpretação que desejamos ressaltar.
[6] Preferimos usar a preposição *em* ao invés da preposição *sobre*, como o fez Bicudo.
[7] Preferimos usar o verbo *riscar* no lugar do verbo *descrever*, usado por Bicudo, pois ele está mais próximo do significado original do termo grego *graphesthai*. E também traduzimos o termo grego *diastēmati* pelo termo *intervalo* pois este último não é obrigatoriamente empregado para fazer referência a medidas, como é o caso do termo *distância* no português. Finalmente, assim como no caso do POST. 1 preferimos o quantificador *qualquer* em lugar do quantificador *todo* uma vez que o primeiro parece envolver uma noção de escolha que o segundo não envolve.

Com o postulado dos ângulos retos, a análise da interpretação proposta torna-se mais complexa. De saída, nas traduções contemporâneas e inclusive a de Bicudo ([Bic09], p. 98), ele normalmente não aparece formulado como os anteriores com um verbo no modo infinitivo. Todavia, no original grego, o infinitivo está lá. Finalmente, no caso do postulado das paralelas sua formulação também emprega um infinitivo, e nesse caso a tradução do nosso autor argutamente contempla esse fato.[8] Deste último postulado trataremos em um futuro artigo, uma vez que nos restringiremos a considerações que envolvem as *propositiones* iniciais do LIVRO I.

De acordo com Vitrac ([Vit90], p. 514), o POST. 4 será empregado diretamente na prova de apenas uma única *propositio*-problema no LIVRO I: a I.46.[9] E embora as traduções em geral não façam alusão ao uso deste postulado como princípio de prova, se ele é de fato necessário aqui, ele estaria sendo usado apenas nos passos finais da *apodeixis* - ou discurso demonstrativo - para garantir que os quatro ângulos do paralelogramo obtido são idênticos. Assim, ele não estaria sendo usado propriamente na construção da resolução do problema da PROP. I.46 caso todos os problemas empregados nessa solução também dele não façam uso. Assim, aparentemente, esse postulado não teria papel construtivo no LIVRO I.

Com respeito às *propositiones*, costuma-se dizer que as três primeiras do LIVRO I demandam construir um objeto geométrico. Mas, ainda que a descrição seja razoável, preferiremos dizer que *elas requerem que um problema geométrico genérico seja resolvido*. A *solução do problema*, por sua vez, envolverá, de modo geral, oferecer uma receita, procedimento ou algoritmo que seria aplicável à qualquer situação similar àquela sob consideração. Ou seja, pede-se apresentar um rol organizado de ações visando a consecução do fim almejado. As ações complexas a partir das quais esse rol é confeccionado são, grosso modo, aquelas ações-problema já resolvidas, entre elas os postulados, tendo por pano de fundo as definições.

Usualmente, o termo *algoritmo* é empregado em computabilidade para designar os procedimentos cuja execução termina. Nesse sentido, virtualmente todas as soluções aos problemas de construção nOS ELEMENTOS bem merecem ser chamadas de algoritmos. E, embora toda construção que resolva um problema geométrico seja acompanhada de uma prova de que o procedimento produz o objeto que era buscado, a questão da finitude do procedimento poucas vezes é objeto de preocupação nesse tipo de prova, dado que essa finitude é evidente pela própria descrição. Os casos onde poderia haver algum tipo de laço infinito merecem destaque e estão de modo geral correlacionados aos procedimentos no LIVRO VII.

A primeira *propositio* pergunta como produzir um triângulo equilátero a partir de uma reta dada; a segunda pede que se transfira sobre um dado ponto tomado como extremidade uma dada reta; a terceira pede que se determine a subtração entre duas retas. Cada uma destas construções vem apresentada por um discurso que é uma receita, procedimento ou algoritmo, e ele é complementado por uma prova de que o objeto a ser obtido seguindo os passos da receita tem todas as propriedades desejadas, conforme a formulação do problema. Cada *propositio*-problema da geometria comporta a solução de dois problemas em sequência, dizíamos: primeiro, o problema da construção propriamente dito e, em seguida, o problema de demonstrar que com a construção obtemos aquilo que era demandado.

A PROP. I.4 é a primeira que não pede como solução uma construção. É a primeira do seu gênero, um teorema, sua forma é condicional. Entendemos que ela também poderá

[8] Ibidem.

[9] Estamos tomando por base o mapa de correlações entre as *propositiones* e os princípios empregados na respectiva prova, como elaborado por esse autor.

ser interpretada como um problema, um problema de tipo especial, no caso, um problema demonstrativo, que requer uma prova composta, entre outras coisas, de asserções. E, doravante, um teorema proposto será interpretado como a proposição do problema de demonstrar a asserção em questão a partir daqueles princípios que ofereçam as bases para tanto. Todavia, em certas situações, o teorema poderá ser ainda visualizado em um quadro mais amplo, como resposta, às vezes parcial, a um problema mais amplo, como na PROP. I.4:

Questão: dar uma condição mínima de igualdade entre dois triângulos.[10]

- *Enunciação de uma dessas condições*: que um triângulo possua dois lados iguais a dois lados do outro e que o ângulo entre esses lados seja igual em ambos triângulos.[11] Conforme I.4 essa condição seria também suficiente para determinar que as bases deles são iguais e que os demais ângulos formam pares de iguais.
- *Enunciação de outras dessas condições*: que um triângulo possua três lados iguais a três lados do outro triângulo. Conforme I.8 essa condição seria suficiente para determinar que os ângulos entre os respectivos lados são iguais.
- *Enunciação de uma terceira dessas condições*: que um triângulo possua dois ângulos iguais a dois ângulos e um lado igual a um lado do outro triângulo. Conforme I.26 essa condição seria suficiente para determinar que os demais lados e ângulos são iguais.

Sob esse ponto de vista, o problema de estabelecer a igualdade de dois triângulos dados, aí compreendida a igualdade dos lados e dos ângulos, reduz-se a alguns outros problemas. Poderíamos nos perguntar, algum deles poderia ser considerado o mais simples? Uma resposta positiva a essa questão requereria que soubéssemos como resolver esse problema mais simples primeiro, para conseguir determinar a igualdade de triângulos depois. Não é imediatamente claro, *a priori*, qual deles acima é o mais simples. Outra possibilidade é a de que a sua ordem dependa da simplicidade de suas provas. Certo é que no texto de Heiberg [Fit07] eles têm uma ordem determinada, I.4 antes de I.8.

A asserção do condicional na PROP. I.4, sob essa perspectiva, equivaleria à formulação de uma relação de dedução da igualdade de dois triângulos a partir da hipótese da igualdade de dois lados e do ângulo de permeio entre eles nos dois triângulos.[12]

E justamente pelo fato de a afirmação ter uma forma condicional, não seria preciso ter resolvido antes o problema de determinar quando dois lados de um triângulo e o ângulo que os permeia é igual a dois outros com seu respectivo ângulo. Mas isso vale somente se a compreensão do que é a prova de um condicional assumir que a suposição

[10] Existe mais de uma condição dessas, a PROP. I.4 apenas formula uma delas, a I.8 formula outra, etc. Para que dois triângulos sejam iguais é preciso que seus lados sejam iguais dois-à-dois e também que seus ângulos sejam iguais dois-à-dois.

[11] Essa é a condição usualmente nomeada de LAL (lado, ângulo, lado). Como sabemos, uma outra condição para a igualdade é o que se convencionou chamar de ALA.

[12] Essa relação de dedutibilidade é condição suficiente para dizer que o problema de demonstrar a igualdade de dois triângulos se reduz ao problema de demonstrar que dois triângulos têm dois lados iguais a dois lados e o ângulo de permeio entre eles também igual.

do antecedente não equivale a supor a posse de uma prova da condição, mas apenas que com a condição identificamos uma situação que não tem porque ser atual, podendo inclusive ser uma situação genérica ou, mais precisamente, poderia ser uma descrição genérica identificando uma classe de situações possíveis. De outro modo, seria preciso ter determinado previamente como realizar a dita prova para que a asserção condicional ganhe sentido.[13]

Já na interpretação mais generosa, bastará com supor o ponto de partida. Todavia, é relevante notar que a prova de I.4 é uma das mais discutidas na história da geometria, e sua correção tem sido muitas vezes rejeitada vide [Axw18].

Daremos nossa própria contribuição ao debate acerca desses teoremas. Desde a interpretação de problemas, I.8 pode ser vista como mais simples, e os postulados ofereceriam elementos suficientes para prová-lo, como veremos mais adiante.[14]

De modo geral, problemas também podem ser formulados de forma condicional. Um exemplo curioso é o da PROP. I.22. Claramente, aí se pede uma construção, a construção de um triângulo, dados os três lados. Mas essa construção envolve uma condição prévia, *sine qua non*: que dois a dois esses lados somados sejam sempre maior que o terceiro.

Estamos, desde nossa perspectiva, frente a um problema de redutibilidade entre problemas ou de condicionalização entre problemas. Aqui a condição é o problema de demonstrar a propriedade, o condicionado é o problema de realizar a construção do triângulo.

Essa redutibilidade ela mesma pode ser apresentada como um problema, quando então se pergunta se haveria redução de um problema a outro problema, conforme exposto em [San21a] e [San24]. Esse tipo de condicional, todavia, deve ser considerado distinto daqueles do tipo de I.4, I.8 e I.26 que só dependeriam de uma suposição simples.

3.2) O postulado 4

Dizíamos que esse postulado é normalmente formulado na forma de uma afirmação nas traduções contemporâneas e, portanto, isso já marca uma diferença importante com respeito aos três primeiros. Mas existe uma boa razão para questionar essa prática, pois como nos outros casos anteriores sua formulação emprega um verbo grego no infinitivo: *eînai*.[15] De modo a manter a homogeneidade da interpretação que estamos propondo, e em acordo com essa formulação do verbo principal no infinitivo, consideramos que esse postulado também pode ser interpretado na forma de um problema, embora neste caso um problema de ordem diferente, um problema cuja solução consiste em fazer uma escolha. Se ele fosse meramente um problema ligando uma condição simples a uma ação, poderíamos talvez tratá-lo com um misto do que é feito em I.4 e I.22. Mas o seu caso parece diferente.

Formulado como um problema, o POST. 4 traduzido de uma forma bem próximo da literal ficaria do seguinte modo:[16]

4. e [Como?] serem todos os ângulos retos iguais entre si

[13] Observe que com raríssimas exceções podemos esperar obter a prova categórica de uma sentença que descreve uma situação genérica. Isso só poderia ser o caso se a descrição envolvesse necessidade lógica e, desse modo, não seria propriamente discriminação de nada, seria descrição de tudo.
[14] Curiosamente, nos *Fundamentos da Geometria* [Hil50], Hilbert parece adotar a mesma perspectiva.
[15] Os dicionários do site *Perseus Tuft* para o texto grego d'OS ELEMENTOS dão o verbo como: *verb pres inf act*, ver http://data.perseus.org/citations/urn:cts:greekLit:tlg1799.tlg001.perseus-grc1:1.post.4.
[16] Como nos casos anteriores, a expressão entre colchetes é de nossa autoria.

Porém traduzido de forma um pouco menos literal, mas mais clara e ainda mantendo a natureza de um verbo no infinitivo, teríamos:

4'. (alternativo) e [Como?] fazer com que todos os ângulos retos sejam iguais

O ângulo reto foi definido previamente aos postulados conforme Def. I.10 como aquele que é igual ao seu suplementar quando uma reta é alteada sobre outra. Assim, na hipótese de que tenhamos um procedimento para levantar uma reta garantindo que os ângulos suplementares sejam iguais, a questão que se coloca é: como estar seguros de que todos os ângulos que se adequem a essa definição serão iguais. Repare que nem todas as superfícies garantem essa propriedade. Considere uma reta que passa exatamente pelo cume de um cone. Considere agora uma segunda reta erigida sobre essa reta exatamente nesse ponto do cume tal que os ângulos suplementares sejam idênticos. Basta um instante para se dar conta de que esses dois ângulos suplementares devem ser menores que os ângulos retos obtidos numa superfície plana. Em breve voltaremos a esse ponto, com mais detalhes.

Existem diferentes soluções ao problema 4'. O problema estaria resolvido caso a área de trabalho fosse homogeneamente esférica[17], mas também estaria resolvido se ela fosse plana. De modo geral, todas as soluções ao problema posto implicam homogeneidade da superfície considerada para as ações postuladas. Cada solução é dada pela escolha de um tipo de superfície. Em termos técnicos, *a classe dessas soluções* é o que chamaremos de *isotopia*. *Uma superfície de trabalho será isotópica sempre que um mesmo procedimento de construção, de acordo com os* POSTS. 1, 2 e 3, *efetuado em locais diferentes dessa superfície e/ou tempos diferentes produza sempre objetos iguais*.[18]

Aqui, para esse problema inicial, ainda vale a ideia de que uma solução deve estar sendo suposta. Mas, qualquer que seja ela, sabemos que ela implica isotopia.

4) O aporte epistemológico da interpretação de problemas e ações

A interpretação baseada em problemas nos leva a olhar de modo diferente para as *propositiones* e, eventualmente, oferece uma nova perspectiva sobre alguns temas que foram intensamente debatidos na história da geometria. No entanto, voltamos a lembrar, com ela não visamos primariamente fazer aportes ao debate histórico, embora tampouco esteja excluída a possibilidade de que eventualmente tenha algum valor para tal.

Do mesmo modo que Hilbert formulou a *Geometria de Euclidiana* de maneira inteiramente baseada em teoremas, aqui nos perguntamos pela viabilidade de fazer uma tal formulação baseada inteiramente em problemas, oferecendo apenas alguns primeiros passos desse programa. Talvez assim preservemos uma grande parte do texto de Euclides, embora provavelmente não tudo.

Acreditamos que com essa proposta abrir-se-ia um espaço para a revisão da epistemologia das ciências, agora compreendida em uma nova chave de leitura.

A seguir consideraremos uma das tradicionais querelas da história da geometria, sobretudo mais recente, aquela envolvendo a prova da PROP. I.1. Depois, consideraremos uma disputa antiga acerca da prova das PROPS. I.4 e I.8, cuja formulação as coloca entre

[17] Embora a superfície de uma esfera seja homogênea, nessa superfície não valerá o postulado das paralelas. Se tomarmos as retas sobre uma superfície esférica como círculos máximos, então quaisquer duas retas terão duas intersecções.

[18] Heath ([Hea21] p. 375) sugere que essa interpretação do POST. 4 poderia ser original de Euclides.

os primeiros teoremas da *Geometria de Euclides*. A interpretação com base em problemas oferece a possibilidade de propor um novo *belvedere* a partir do qual visualizar ambas querelas com matizes novos sem a pretensão de resolvê-las em definitivo.[19]

4.1) A querela da PROP. I.1

Vários autores, dentre eles Heath ([Hea56], p. 242 e ss.) apontam uma falha na solução aportada à PROP. I.1 na obtenção do triângulo equilátero ABC a partir de um segmento de reta AB, conforme a Figura 1.

Entendem que a determinação do ponto C de intersecção entre os dois círculos requereria axioma(s) de continuidade que, aliás, passa(m) a ser adicionado(s) às apresentações da *Geometria Euclidiana*, como na reformulação hilbertiana [Hil50].

Segundo os críticos, só com a presença deste axioma ficaria garantida a existência de um ponto de intersecção C entre as duas circunferências. E isto faria todo sentido caso a ontologia adotada assumisse que os pontos são os objetos primários da geometria e que os demais objetos podem ser todos definidos como conjuntos de pontos. As linhas que constituem os círculos poderiam ser meramente densas, mas não contínuas por exemplo, e assim a existência do ponto de intersecção poderia não estar garantida.[20]

Porém, se assumimos que a PROP. I.1 formula um problema e que o mesmo deve ser reduzido aos problemas fundamentais da *Geometria de Euclides*, então aquela crítica se fundamentaria sobretudo na ontologia existencial platônica que os matemáticos passaram a adotar em algum momento da história.

A situação mudaria de figura ao se adotar uma interpretação que vê na resolução de problemas o seu principal esteio e no conceito de ação seu elemento central.

Na interpretação baseada em problemas, os POSTS. 1, 2 E 3 são considerados problemas dos quais se supõe a posse de uma ação de solução. Não é difícil interpretá-los como problemas. Na verdade, todos três são formulados com o verbo no infinitivo em grego: traçar/levar, estender e produzir/descrever/riscar. E em nenhum dos três casos está especificado como essas ações devem ser realizadas. Assim, ao tomá-los como problemas para os quais supomos possuir uma solução, não entramos no detalhe do que seria essa solução, precisamos apenas supor que o problema pode ser resolvido.

Sob uma interpretação de problemas, não parece razoável conceber que uma solução que supomos possuir aos problemas de traçar, estender ou produzir, qualquer que seja a tradução adotada para os verbos do grego encontrados nesses postulados, deva envolver algum tipo de descontinuidade.[21]

Dizíamos que com a expressão *Geometria de Euclides* designaremos o conteúdo de um tratado histórico que estamos bastante certos de haver existido e cuja reconstrução é ela mesma de natureza hipotética, estando baseada em manuscritos antigos que são cópias traçáveis até mais ou menos a época de Téon de Alexandria, pai de Hipátia, no século IV d.C.[22] Já a expressão *Geometria Euclidiana* engloba os desenvolvimentos posteriores dos temas da geometria já presentes em Euclides e tem como principal referência a obra de fundamentos de Hilbert no século XIX [Hil50]. Se a ontologia de

[19] Inclusive porque qualquer exame desses problemas requer um debate amplo no campo histórico, o que demanda competências extraordinárias dada a natureza complexa do problema.
[20] Nesse sentido, a presença dos axiomas de continuidade garantiria que nenhuma estrutura onde as linhas sejam descontínuas fosse tomado como modelo da *Geometria Euclidiana*.
[21] Por outro lado, não se exclui tampouco a possibilidade de que alguma solução particular possa ser descontínua, o que certamente envolveria uma ação complexa, e requereria uma certificação da coerência conjunta das soluções aos Posts. 1, 2 e 3. Mas essa não é de todo modo a primeira ideia que vem a mente quando pensamos em uma putativa solução a cada um dos três primeiros problemas.
[22] Ver [Bic09] p. 21-32.

pontos em um espaço ideal da *Geometria Euclidiana* é clara, por outro lado é um problema histórico difícil determinar qual ontologia subjaz à *Geometria de Euclides*, a começar pelo fato de que a reconstrução do texto é ela mesma hipotética.

Notávamos mais acima que Platão recusava explicitamente os termos de ação usados na geometria antiga. Se por um lado há objeções ao uso das expressões de ação no âmbito da geometria, por outro lado isso também atesta que esses termos já eram usados antes do III século d.C. e continuarão a sê-lo muito depois. Durante largo período da história, a geometria e seu estudo foram acompanhados de uma perspectiva ontológica que hoje percebemos de modo nebuloso, mas que muitos pensam que seria essencialmente de corte aristotélico e envolveria de modo central os conceitos de contiguidade/continuidade. Esse é um tema de debate entre historiadores e não há muitas unanimidades neste ponto.[23]

Concretamente, na primeira *propositio* do LIVRO I, cujo diagrama está ilustrado na Figura 1 parece natural entender que as ações na produção dos dois círculos com o uso do POST. 3 são contínuas. Estranho seria se elas fossem ações descontínuas. Desse modo, elas têm que se cortar. Mas, visto a enorme quantidade de literatura acerca desse ponto, o que significa dizer isso? Significa simplesmente dizer que a solução ao problema do POST. 3 é uma ação contínua e que, no caso em questão, os traços diagramáticos gerados por elas podem coincidir no espaço em algum momento. No ponto designado por C a produção de qualquer um dos dois círculos poderia parar ou também poderia (re)começar, ou seja, as duas produções poderiam parar no mesmo lugar e as duas poderiam recomeçar no mesmo lugar. Nós na tradição pós Euclides designamos esse lugar de *ponto de intersecção*. E se o fizermos, deveríamos ter em mente que esses objetos, os pontos de intersecção, são secundários com respeito as ações primárias envolvidas na solução dos postulados. O ponto de intersecção deve ser visto como uma putativa parada ou um putativo (re)início da ação de produção de uma linha, inclusive de uma circunferência. E no caso da PROP I.1 deve haver duas intersecções, como a maioria de nós pode intuitivamente captar. Observamos, adicionalmente, que o conceito de *ponto de intersecção* não aparece declinado entre as DEFINIÇÕES do LIVRO I. Na verdade, a PROP. I.1 descreve uma situação de círculos que se cortam mutuamente, sem falar em ponto de intersecção. As definições tratam do conceito de *ponto*, primeiro de um modo negativo na Def. I.1, como aquilo que não tem partes, depois na Def. I.3 como sendo a extremidade de uma linha, e aqui entenda-se de uma linha qualquer, seja ela reta ou não.

De forma correlata, é preciso considerar que a ontologia com a qual a interpretação com base em problemas está lidando é diferente daquela ontologia platônica. Porque estaríamos obrigados a considerar os objetos como elementos pertencentes a uma realidade transcendente? Sob a ótica aqui sendo proposta eles seriam meramente o resultado de certas ações simples sobre um espaço de trabalho homogêneo.[24]

Consequentemente, os diagramas que acompanham as *propositiones* podem ser ao mesmo tempo, em princípio, um caso concreto em que os procedimentos de construção são aplicados, mas também servem de ilustração para o caso geral de solução de um problema de construção uma vez que as ações para resolver problemas do mesmo tipo, em outras situações, serão similares, pois terão a mesma estrutura, salvaguardadas as diferenças relativas à nomeação dos elementos, suas posições e magnitudes dentro de um espaço finito, mas considerado extensível.

Ainda a respeito da intersecção dos dois círculos, quando construídos tomando como centros as duas extremidades de um mesmo segmento que serve de raio, Heath ([Hea56] p. 242-243) afirma que não antes da prova da PROP. III.10 - que afirma que dois

[23] Um exemplo de uma interpretação recente que vai nessa direção aristotélica é [Kat22].
[24] Incluída a possibilidade de representar esse espaço e as ações sobre ele na imaginação.

círculos só podem se intersectar em dois pontos - estaríamos autorizados a assumí-lo. Mas, a nosso ver, vai uma larga diferença entre provar que é impossível que existam mais que duas intersecções entre dois círculos quaisquer e adquirir uma intuição segura de que no caso genérico de uma construção como aquela da Figura 1 teremos duas intersecções. Observe-se que a prova da PROP. III.10 com quatro intersecções apresenta um diagrama deformado, onde um dos supostos círculos tem a forma de uma elipse. Essas deformações são via de regra introduzidas por meio de hipóteses contrafactuais, usadas num discurso visando alcançar uma *reductio*.[25] Não encontramos situações similares durante a construção, ou *kataskeue*, que visa solucionar uma *propositio*-problema.

Muito curiosamente, é bem raro encontrar comentários a respeito da construção dos diagramas nas três primeiras proposições que abordem o tema da homogeneidade do espaço, em particular para o caso da PROP. I.1. Do mesmo modo, tampouco o POST. 4 costuma ser mencionado com respeito às construções efetuadas nas provas dessas três primeiras proposições. Mas, parece claro que tornar-se-ia relevante perguntar se o resultado pretendido com a construção ainda seria alcançado caso o espaço que contém os diagramas não fosse homogêneo.[26] Se não fosse, então a isotopia ou homogeneidade se revelaria como elemento importante para que a construção cumprisse com seus objetivos. Assim, nas reconstruções contemporâneas que indicam a dependência de cada um dos passos de construção com respeito aos postulados uma observação referente à isotopia deveria ser acrescentada.

Como exemplificação do ponto, considere o caso da construção apresentada na PROP. I.1, porém efetuada em um plano que contenha um único pico na forma de um cone justo no ponto A como no exemplo da figura abaixo:

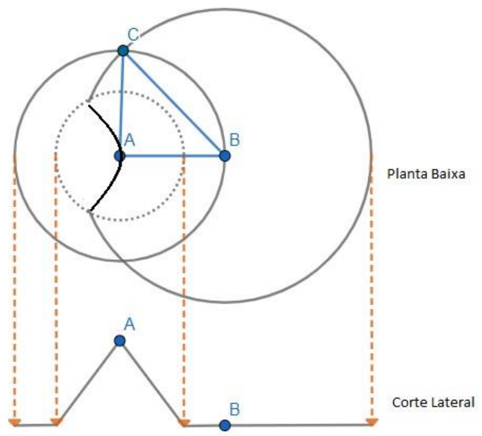


Figura 3

A superfície envolvida na Figura 3 não se coaduna com o POST. 4. Nessa superfície as putativas retas poderiam não ser o menor caminho entre dois pontos. Mas seus traços não sofrem maiores deformações e algum tipo de comparação entre elas pode

[25] As hipóteses contrafactuais devem assim ser vistas como situações de permissividade nas quais ao diagrama poderiam ser acrescentados desenhos que não podem ser produzidos por nenhuma das ações relativas aos três primeiros postulados.

[26] Repare que a definição de superfície plana na DEF. I.7 é similar àquela restrição às linhas retas que encontramos na DEF. I.4. Sobre uma superfície esférica poderíamos tomar os círculos máximos como as linhas retas, e então a superfície esférica se ajustaria bem à DEF. I.7, embora não sendo plana. Ou seja, se essa é uma superfície possível, o Post. 5 pode ter um papel seletivo, uma vez que as definições apenas não seriam suficientes para determinar sobre qual superfície de trabalho deveríamos considerar as construções apresentadas nos ELEMENTOS.

ainda ser mantida. Contudo, os ângulos, pela forma como foram definidos, se veriam bastante afetados. Os ângulos iguais em que o cume do cone pode ser dividido traçando uma perpendicular a partir de qualquer reta que o corte de acordo com a DEF. I.10 não seriam iguais a outros ângulos obtidos pela elevação de uma perpendicular a partir de uma reta sobre a superfície plana.

De modo geral, alguns traços obtidos com base nos postulados ofereceriam resultados distintos para superfícies não-isotópicas dependendo da posição. Na Figura 3 o triângulo obtido é equilátero, embora a vista de planta baixa não pareça indicar isso. É preciso ter em conta que as retas CA e BA "sobem ao cume cônico". A figura representa a mesma construção da PROP. I.1 só que efetuada sobre uma superfície não-isotópica, estando o centro A no exato cume do cone.[27]

Todavia, se o espaço é homogêneo, os mesmos procedimentos, a partir dos mesmos parâmetros iniciais, devem produzir figuras iguais em locais distintos. E, assim, bastará um exemplo para ilustrar o funcionamento do procedimento de construção, dando ao mesmo tempo uma ideia de como ela funciona de modo geral, pois nenhuma superfície se distingue da outra e nenhum local em uma superfície se distingue de outro.

Por certo existem muitas questões a serem pensadas e respondidas a partir da abordagem de problemas proposta aqui. Por enquanto podemos dizer que as construções das três primeiras *propositiones* não seriam gravemente afetadas em espaços não-isotópicos relativamente simples como aquele da Figura 3. Porém, a partir da PROP. I.4 a situação muda de figura, pois entendemos que aí a noção de ângulo passa a entrar de modo essencial no desenvolvimento do conhecimento geométrico no LIVRO I.

4.2) Algoritmos e geometria

A seguir, trataremos das PROPS. I.4 e I.8. Suas provas tem sido muito discutidas e, também, rejeitadas. O uso de isotopia poderia, eventualmente, oferecer uma prova alternativa. Antes, porém, queremos fazer uma observação motivada por um comentário de Vitrac acerca da interpretação d'Os Elementos envolvendo o conceito de algoritmo. Diz o autor que há uma certa moda contemporânea de usar esse conceito mais recente e de sucesso e aplicá-lo à geometria. Ao considerar o problema da prova de I.4 e o uso do conceito de algoritmo, ele adiciona uma nota de rodapé (nota 16 em [Vit90] p. 297) com o seguinte teor:

> *L'approche des mathématiques en termes de procédures et d'algorithmes est à la mode.*
> *Elle peut être tout-à-fait éclairante dans certains cas, mais ici, qu'est-ce que 'algorithme' ajoute à l'idée de 'construction'?*

Compreende-se a observação desse autor, uma vez que a interpretação histórica da geometria é tema árduo e o anacronismo sempre tentador. Todavia, como o próprio Vitrac observa ([Vit90] p. 135) já havia autores do século IV a.C., como Menêcmo, que consideravam a interpretação com base em problemas como a forma preferencial para expressar o conhecimento geométrico. E, uma vez que a perspectiva da interpretação de

---

[27] Para que o triângulo equilátero em questão fosse equiângulo também, cada um dos ângulos deveria medir 60º. Suponhamos que esse seja o caso. O ângulo ∠CAB tem seu vértice no cume do cone e ele é - segundo o desenho - aproximadamente 1/4 de volta do cume. Desse modo, caso o triângulo fosse também equiângulo, o que não está assegurado ressaltamos, os quatro ângulos obtidos na partição do cume pela definição de ângulo reto mediriam algo em torno de 60º. Observamos que o desenho foi efetuado com o software *web Geogebra* e, portanto, tem algum grau de fidelidade.

problemas é por si só interessante, e que por meio dessa perspectiva os conceitos de procedimento e algoritmo se elevam ao primeiro plano, torna-se possível inquirir a *Geometria de Euclides* desde a perspectiva de problemas de modo puramente especulativo e relativamente independente das preferências que em alguma época adotou-se na interpretação acerca da natureza da disciplina.

Por certo que a leitura da obra de Euclides está condicionada pelo acúmulo de discussões que a tradição legou. Mas também é preciso reconhecer que o conceito de problema é tão antigo quanto o conceito de teorema e que chega a ser espantoso que ele tenha sido relativamente eclipsado na tradição e não tenha recebido um tratamento sistemático mais importante.

É em prol da compreensão do conceito de problema e do fato de que os problemas geométricos encontrados nOs Elementos são por natureza de tipo genérico que nos vemos na premência de recorrer aos conceitos de procedimento e algoritmo como conceitos centrais para a constituição de nossa armação teórica. A solução de um problema genérico é um procedimento. Se estivéssemos mais preocupados com defender teses históricas, poderíamos responder a Vitrac que sob certo olhar Euclides nos daria testemunho de ter sido um dos primeiros matemáticos na história a ter estado ocupado com os conceitos de procedimento e algoritmo, desse modo tirando qualquer originalidade dos contemporâneos acerca do tema. Mas esse é ainda um passo bastante distante.

Desse modo, somos forçosamente levados a indagar apenas se, em alguma medida, consciente ou inconscientemente, alguns dos geômetras da antiguidade, quem sabe Euclides também, já não teriam divisado a relação entre matemática e procedimentos.

Há no entanto um ponto específico que talvez mereça nossa consideração e que nos permite devolver a Vitrac a questão. Contemporaneamente, costuma-se traduzir pelo termo *construção* uma pequena variedade de termos gregos distintos que ocorrem n'Os Elementos. E quando usado no contexto interpreta-se que ele designaria o resultado de agregar ou considerar certos componentes geométricos juntados em um mesmo diagrama, ou seja, designaria um conjunto de traços. Mas é importante perguntar se os termos usados na tradição, e hoje traduzidos por *construção*, serviam primariamente para designar o diagrama obtido ou, ao invés, para designar os procedimentos empregados na obtenção do diagrama, pois essas são desde nossa perspectiva duas coisas claramente distintas. E a distinção é relevante, por exemplo, para a discussão da leitura existencial dos problemas geométricos. Num caso tratar-se-ia de garantir a existência de certos tipos de diagramas, no outro tratar-se-ia de garantir a existência de certos tipos de procedimentos genéricos.

Pareceu-nos tarefa digna a de aprofundar a abordagem baseada em problemas. E, para fazê-lo, o conceito de algoritmo não aparece aqui apenas como uma moda, mas porque tem conexão necessária com o tema da resolução de problemas.

4.2.1) Procedimentos e a querela da Prop. I.4

Havíamos começado a examinar o seguinte teorema ilustrado pelo diagrama da *Figura 2* ([Bic09] p. 101):

> Prop. I.4 *Caso dois triângulos tenham os dois lados iguais* [*aos*] *dois lados, cada um a cada um, e tenham o ângulo contido pelas retas iguais igual ao ângulo, também terão a base igual à base, e o triângulo será igual ao triângulo, e os ângulos restantes serão iguais aos ângulos restantes, cada um a cada um, sob os quais se estendem os lados iguais.*

A prova desse teorema tem sido muito discutida desde a antiguidade, uma vez que nela parece que se está a fazer um movimento de superposição do triângulo ABC sobre o triângulo DEF. E a questão que se coloca é a de se tal movimento estaria autorizado pelos princípios da *Geometria de Euclides*.

Para uma discussão bastante rica da questão ver o comentário de Vitrac ([Vit90] p. 294-299) ou o de Heath ([Hea56] p. 248-250) e, sobretudo, a apresentação da polêmica entre Peletier e Clavius por Axworthy ([Axw18]) que vem acompanhada de ampla revisão bibliográfica.

Historicamente, a questão fundamental passa a ser a de descobrir qual seria a natureza dessa superposição. Se a superposição envolve movimento, então a próxima questão consiste em saber que tipo de movimento poderia estar autorizado pelos princípios de Euclides.

Numa interpretação existencial, de corte platônico estrito, nenhum movimento poderia estar envolvido, uma vez que os objetos matemáticos seriam entidades pertencentes a um mundo ideal do qual os movimentos e a mudança não fariam parte.

Mas aquela posição parece ir contra o próprio texto d'OS ELEMENTOS uma vez que a definição de esfera em XI.14 é feita a partir da rotação completa de um semicírculo. Por conseguinte, não se pode descartar que outros movimentos também tivessem sido considerados por geômetras da antiguidade. Para alguns isso ocorreria no POST. 1, de produção de uma linha reta finita, e no POST. 3, de produção de um círculo. Mas parte da tradição rejeita essa perspectiva de movimento ou fluxo de um ponto.

No caso da linha vemos com alguma frequência em certas edições o verbo grego sendo traduzido pelo verbo “traçar” no infinitivo, o que se coaduna com a ideia de fluxo de um ponto. Porém, desde nossa perspectiva, ou seja, da perspectiva baseada em problemas, esse não é sequer um caminho necessário.

A suposição de que sabemos resolver o problema de como produzir uma reta poderia, por exemplo, desde um ponto de vista prático e concreto, ser efetuada com o ato de estender um fio de um ponto a outro, e este ato não envolve exatamente fluxo ou movimento de um ponto. Desde nossa perspectiva a solução de um problema será sempre uma ação, não necessariamente um movimento e, qualquer que seja o caso, *a priori* envolverá continuidade.

Já no caso do círculo, a definição não menciona de modo explícito nenhum movimento. Por sua vez, o postulado fala em “riscar” a circunferência. A tradição moderna assumiu que a definição envolveria mesmo que sub-repticiamente uma rotação completa em torno de um ponto fixo. E, de fato, parece difícil não interpretar o POST. 3 sem empregar a ideia de fluxo de um ponto, inclusive quando adotamos a interpretação com base em problemas. Desde um ponto de vista concreto, de modo similar ao que foi feito no caso do POST. 1, sempre se pode considerar um fio simplesmente com uma extremidade fixa e outra extremidade móvel.

Na PROP. I.1, por exemplo, para obter a construção de um triângulo equilátero ao usar o POST. 3 bastaria estender dois fios idênticos ao segmento AB, um deles fixo em A o outro fixo em B. ajustando ambos para que coincidam em seu ponto final móvel, desse modo obtendo o resultado desejado. Ou seja, se fluxo há neste caso, ele seria local e limitado a um pequeno arco de ajuste onde as duas direções do arco podem ser usadas. Mas, claro, nenhuma dessas soluções é obrigatória, são apenas soluções possíveis e aproximadas. Aliás, em alguma medida, elas podem ser desenvolvidas usando tão somente a imaginação, caso no qual deixam de ser relevantes vários de seus atributos físicos, como a espessura do fio, por exemplo.

Todavia, mesmo admitindo os movimentos envolvidos na produção de uma reta ou de um círculo, não é claro como a superposição seria efetuada para o caso da PROP. I.4. Por boas razões, parece natural considerar o movimento de superposição como um movimento mecânico, o qual bem poderia deformar os objetos transportados. Além disso, se movimentos mecânicos forem admitidos, eventualmente alguns problemas considerados insolúveis com os meios da *Geometria de Euclides* passam a ser solúveis, como a trissecção do ângulo.

Axworthy ([Axw18] p. 28 e ss.) aponta que Clavius, por exemplo, adotou uma posição curiosa segundo a qual nenhum movimento de superposição seria necessário, pois sendo a *propositio* um teorema, e não um problema, bastaria que a superposição fosse considerada de um ponto de vista puramente intelectual sem a necessidade de sua efetivação. Contudo, não nos parece que isso resolva a questão.[28] A pergunta que naturalmente seria feita é: o que mais poderia ser "resolvido" por considerações dessa mágica de natureza puramente intelectual na geometria?

Bem mais recente, no século XX, Levi [Lev06] adota a chamada interpretação existencial dos postulados e das *propositiones*[29] - seguindo a trilha de Hilbert -, explicando a validez da prova de I.4 por meio de um princípio de homogeneidade do espaço da *Geometria de Euclides*:[30]

> *(...) es luego natural pensar que una* NOCIÓN COMÚN *o idea primera, no enunciada por Euclides por ser demasiado inmediata, fuera esta falta de lugar determinado, una especie de identidad lógica por la cual*[,] *SI UNA FIGURA EXISTE EN ALGÚN LUGAR*[,] *UNA IDÉNTICA EXISTE EN CUALQUIER LUGAR, pues el pensamiento no tiene lugar; a esta idea, para darle un nombre, podemos llamarla* HOMOGENEIDAD DEL ESPACIO.

Desde nosso ponto de vista de problemas, Euclides bem poderia ter considerado a questão posta por Levi. Porém, se o fez, não tratou da homogeneidade do espaço com uma noção comum, mas com o POST. 4. Essa seria a nossa tese se tivéssemos que formular uma.

---

[28] Para que este tipo consideração tenha alguma factibilidade seria preciso estar apoiado por um uso da linguagem envolvendo o uso de suposições e condicionais no subjuntivo, eventualmente contrafactuais. Deveríamos provar algo como: *caso os triângulos com aquelas características forem* [*tivessem sido*] *sobrepostos, então seus três lados e seus três ângulos coincidiriam*. Mas a formulação do teorema não costuma ser dada por meio de um condicional subjuntivo nas traduções mais conhecidas e nem parece sê-lo no original grego.

[29] Diz Levi à p. 101: *Con la enunciación de los postulados entendemos que Euclides ha querido aclarar el `existe' con el `se puede'; pero, cualquiera sea la palabra, pide al lector haber reflexionado bastante para concebir - y considerar sin contradicción - los conceptos enunciados, con las propiedades que se les atribuyen; para decirlo con las palabras modernas, Euclides define con los postulados las ideas primitivas de su sistema. ... Para ayudar al lenguaje con el dibujo, esos conceptos podrán, en cada caso, representarse por figuras, y esto justifica el `se puede'; pero está siempre entendido que lo que el geómetra afirma no se refiere a la imagen física, sino al concepto mental que con ella se quiere representar.* Essa formulação, apesar de referida a Sócrates/Platão no texto, é característica dos partidários da empreitada axiomática hilbertiana. Levi considera os diagramas como meros auxiliares da linguagem. O ponto de vista de Levi nos permite retroagir a um comentário que fazíamos acerca da noção de algoritmo motivada pela opinião de Vitrac de que esse conceito não acrescentava nada novo na interpretação da geometria antiga, ver citação mais acima. Para Levi a existência dos objetos estava dada pelo "se pode". Mas, olhando para os postulados como problemas e ações, a exibição do procedimento garante algo bem mais forte, a existência de um procedimento para obter o objeto e não apenas a mera existência do objeto. A exibição dá fundamento a uma leitura construtivista da geometria, ao passo que a mera asserção de existência do objeto não. E isso é uma diferença monumental.

[30] Ibidem p.107, destaques do autor.

Vamos examinar mais de cerca como ele propõe sua solução. O roteiro nos oferecerá alguns marcos para comparação. Segundo ele:[31]

> *Los elementos con los cuales está construída la geometria de Euclides son segmentos y ángulos; veremos pronto, al analizar los primeros teoremas, el oficio fundamental que cumplen los postulados con respecto a la operación de transporte de las figuras, para el cual el instrumento principal es el círculo que, en la interpretación existencial del post. 3, debe considerarse como figura dada más bien que generada por movimiento continuo; pero de inmediato el círculo tiene vinculación con los segmentos, no con los ángulos.*
>
> *Para llegar a éstos sirven los teoremas sobre la igualdad de los triángulos de los cuales desciende que el transporte de un ángulo cualquiera podrá conseguirse cuando se sepa transportar un ángulo determinado.*

Com isso fica claro que para Levi o ofício fundamental de I.4 está na sua utilidade para mostrar igualdade de ângulos e, assim, oferecer uma explicação do que ele chama metaforicamente de “transporte” de ângulos. A posição do autor não deixa de ser curiosa, uma vez que no arcabouço hilbertiano qualquer ação de transporte não faria muito sentido.[32] Como veremos, as novas provas de I.4 e I.8 a serem oferecidas mais abaixo garantirão essa igualdade de ângulos entre triângulos, sob certas condições, fazendo uso essencial do conceito de homogeneidade e sem empregar sobreposição ou transporte.

A dificuldade com I.4 - mas também com I.8 assim como com III.24 - é apontada por Heath ([Hea56] p. 225) do seguinte modo:[33]

> *The phraseology of the Propositions, e.g. I.4 and I.8 in which Euclid employs the method indicated, leaves no room for doubt that he regarded one figure as actually moved and placed upon the other.*

Na tradução de Bicudo de I.4, o triângulo ABC é ajustado sobre o triângulo DEF. Interpretado como movimento, esse ajuste não parece amparado nos princípios até então adotados. E, se os triângulos estiverem espelhados, esse ajuste envolveria um movimento em três dimensões de “desvirar” o triângulo. Adicionalmente, nada garantiria que um tal movimento não deformasse a figura.[34]

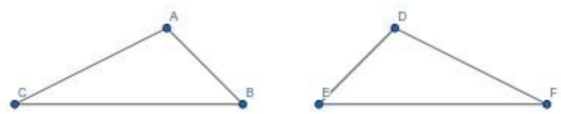


Figura 4

---

[31] Ibidem p. 102.

[32] Portanto, o termo deve aqui ser entendido em sentido alegórico, pois não pode haver verdadeiro transporte no espaço ideal. Mas não deixa de ser curioso que a *Geometria Euclidiana* ao fim e ao cabo tenha que recorrer a termos alegóricos.

[33] Ibidem p. 102.

[34] Que esse caminho não será considerado parece ficar sugerido pela forma como a prova da PROP. I.5 é desenvolvida. Se o triângulo isóscele ABC da PROP. I.5, onde AB=AC, fosse comparado com o triângulo ACB, onde os ângulos inferiores estão nominalmente invertidos, pela PROP I.4 ficaria estabelecido que esses dois ângulos inferiores são iguais, sem agregar nenhum novo elemento ao diagrama inicial, diferente da prova que de fato vem dada nOS ELEMENTOS.

Vários comentadores consideram que a prova de I.4 por sobreposição requereria um postulado que garantisse que os deslocamentos preservam a figura.

Passando a outro autor, R.J. Wagner [Wag83] nos propõe uma prova alternativa de I.4. Até onde sabemos, sua ideia é original e ele propõe empregar o conceito de homogeneidade das construções para efetuar a prova, dizendo que essa propriedade de algum modo estaria associada ao POST. 4, embora não esclareça exatamente como isso se daria. Exploraremos mais a fundo essa ideia, embora as provas que serão apresentadas sejam distintas das oferecidas por aquele autor, serão mais simples na verdade. Ocorre que, empregando a noção de isotopia, a prova que se tornaria mais imediata é a do teorema I.8 e não a do teorema I.4. E, se damos relevância a esse fato, temos que introduzir uma alteração na ordem de exposição das *propositiones* nOS ELEMENTOS[35], o que implicará uma renumeração das PROPS. I.4-I.7 que agora passariam a ser as PROPS. I.5-I.8, respectivamente, assim como demais mudanças que isso acarretaria.

A prova da NOVA I.4 (ANTIGA I.8) requer apenas construções muito simples que não exigem mais do que aquilo que já fora efetuado no primeiro problema. Porém a essas construções será preciso agregar um apelo ao POST. 4 também. Além disso, essa nova *propositio* será obtida por leve reformulação de I.8 para receber parte do conteúdo que pertencia a antiga PROP. I.4. Eis a nova formulação.

NOVA PROP. I.4 (antiga I.8): CASO DOIS TRIÂNGULOS TENHAM OS DOIS LADOS IGUAIS [AOS] DOIS LADOS, CADA UM A CADA UM, E TENHAM TAMBÉM A BASE IGUAL À BASE, [SERÃO TRIÂNGULOS IGUAIS E TERÃO TAMBÉM TODOS OS ÂNGULOS IGUAIS ENTRE SI QUANDO DETERMINADOS POR PARES DE RETAS IDÊNTICOS A OUTRO PAR NO OUTRO TRIÂNGULO].

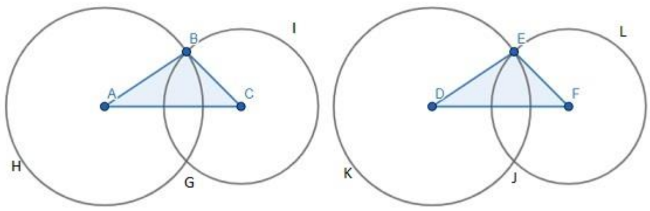


Figura 5

PROVA:[36] Sejam dados os triângulos ABC e DEF, tal que para os lados valem AB=DE, BC=EF, e para as bases vale AC=DF. O objetivo é provar que os ângulos ∠ABC=∠DEF, assim como ∠BAC=∠EDF, por um lado, e ∠BCA=∠EFD, por outro. Tomando o centro A e o intervalo correspondente ao raio AB produzimos o círculo BGH pelo POST. 3†. Do mesmo modo, tomando o centro D e o raio DE, que é igual ao raio AB por hipótese, produzimos o círculo EJK pelo POST. 3†. Os dois círculos foram produzidos a partir de intervalos iguais, uma vez que baseados em raios iguais, pelo emprego do mesmo postulado, logo BGH=EJK, por isotopia, ou seja, pela propriedade que é comum à classe de condições que servem de solução ao POST. 4, a de produzir exatamente os mesmos objetos desde que os procedimentos empregados sejam os mesmos, independentemente da posição espacial. Procedimento análogo será feito com os círculos BGI e EJL, logo BGI=EJL por isotopia, pois foram construídos a partir de raios iguais, por hipótese. Adicionalmente a figura formada com os círculos BGH e BGI é igual a figura formada

[35] Esse ponto nos foi sugerido pelo prof. M. Panza, a quem agradecemos.

[36] O diagrama adotado para provar a nova PROP. I.4 e antiga PROP. I.8 é praticamente o mesmo diagrama da antiga PROP. I.4} com o acréscimo de um par de círculos em cada triângulo. A prova a seguir poderia ser bastante reduzida se os pequenos detalhes fossem deixados ao leitor, mas dada a história do problema preferimos adotar procedimento extra-cauteloso.

com os círculos EJK e EJL, pois os círculos são iguais dois a dois e o intervalo de seus centros AC e DF são iguais por hipótese.

Os pontos B e E são intersecção dos círculos BGH com BGI e EJK com EJL, respectivamente. As retas dadas pelo POST. 1† entre os centros de BGH e BGI, por um lado, e os centros de EJK e EJL, por outro, coincidem respectivamente com as bases AC e DF. Por hipótese, temos que AC=DF. As retas entre o centro de BGH, por um lado, e o centro de BGI, por outro, com a intersecção dos círculos BGH e BGI, respectivamente, acima de AC, coincidem com a reta AB e com a reta CB, respectivamente. Do mesmo modo, as retas entre o centro de EJK e o centro de EJL e a intersecção de cima entre EJK e EJL coincidem com DE e com FE, respectivamente. Em ambos casos, o par de retas - AC e AB, por um lado, DF e DE, por outro - não estão sobre uma mesma reta no plano e, em cada caso, elas se encontram no centro dos respectivos círculos, atendendo pois a DEF. I.8. A inclinação (*klisis*) entre a reta que coincide com AC e da reta que coincide com AB tem que ser a mesma que a inclinação da reta que coincide com DF e da reta que coincide com DE, por isotopia. Pela DEF. I.8 essas inclinações definem o ângulo entre essas retas. Assim, ∠BAC=∠EDF. Raciocínio idêntico vale para os demais ângulos. Logo, ∠ABC=∠DEF e ∠BCA=∠EFD. Portanto, os dois triângulos são iguais, visto que todos seus lados são iguais dois a dois, por hipótese, e que obrigatoriamente seus ângulos devem ser iguais dois a dois nesse caso.

QED

Não há propriamente uma definição do que faz dois triângulos iguais. Todavia, segundo as DEF. I.20 e I.21 claramente os triângulos podem diferir pelo comprimento de seus lados e pela medida de seus ângulos - podendo eles terem ou um ângulo reto, ou um ângulo obtuso, ou três ângulos agudos. Assim, em uma leitura que nem precisa ser generosa, infere-se que a igualdade entre eles envolve apenas esses elementos, razão pela qual na prova acima todos os itens necessários para a demonstração da igualdade foram considerados.

Feita essa observação, notamos que a aceitação da prova dada ofereceria uma perspectiva de decisão à questão acerca do movimento rígido de um triângulo sobre outro, tanto debatida na história da geometria. O movimento seria, desde essa perspectiva, completamente desnecessário, assim como também o será com respeito à NOVA PROP. I.5, ANTIGA PROP. I.4. Vários leitores poderão estar em dúvida se deveriam ou não aceitar a prova e, se aceitarem, o que mais deveriam conceder. Alguns, para evitar falar em movimento, propunham pensar a prova original como a de uma sobreposição virtual. Todavia, notamos, essa alternativa é incomparavelmente mais dubitável do que o uso do princípio de isotopia na prova anterior. Recordemos que a solução via isotopia só faz sentido porque estamos em um contexto onde os postulados são interpretados como problemas.

A parte mais delicada da prova acima está em demonstrar que cada ângulo de um triângulo é igual ao seu correspondente no outro triângulo. E o argumento é fundamentalmente o mesmo em todos os três casos. O apelo à isotopia como característica da classe de soluções ao problema do POST. 4 é o passo fundamental. Por isotopia entendemos aqui que as mesmas construções feitas em locais distintos e/ou tempos distintos resultam objetos iguais. E as construções aqui empregadas usaram apenas os POSTS. 1 e 3, sempre na mesma ordem, a partir de elementos de partida iguais, além é claro da NOÇÃO COMUM 4 que permite inferir igualdade a partir da coincidência.[37]

[37] Uma prova por *reductio*, similar àquela que encontramos em Prop. I.26, requereria considerar que pelo menos um dos pares de ângulos correspondentes não é igual ao correspondente na outra figura e que, portanto, um desses ângulos é maior que o outro. Na hipótese de poder considerar o menor como parte do maior, sem ainda ter mostrado como “transportar” ângulos, o raciocínio por *reductio* ou não funcionaria ou

Até esse ponto ainda não sabíamos como comparar ângulos. Agora já podemos fazer algo a esse respeito e isso será notado na prova que apresentamos na sequência.

Por fim, o leitor terá notado que na prova acima as justificações envolvendo os postulados foram marcadas com uma adaga. Explicaremos a razão em breve, depois da prova da próxima *propositio*, que utiliza a ideia básica da prova anterior.

Nova Prop. I.5 (antiga I.4): Sejam os dois triângulos ABC e DEF, tendo os dois lados AB e BC iguais aos dois lados DE e EF, cada um a cada um, por um lado, o AB ao DE, e, por outro lado, o BC ao EF, e o ângulo sob ABC igual ao ângulo sob DEF. Digo que também a base AC é igual à base DF, e o triângulo ABC será igual ao triângulo DEF, e os ângulos restantes serão iguais aos ângulos restantes, cada um a cada um, sob os quais se estendem os lados iguais, por um lado, o sob BAC ao sob o EDF e, por outro lado, o sob BCA ao sob EFD.

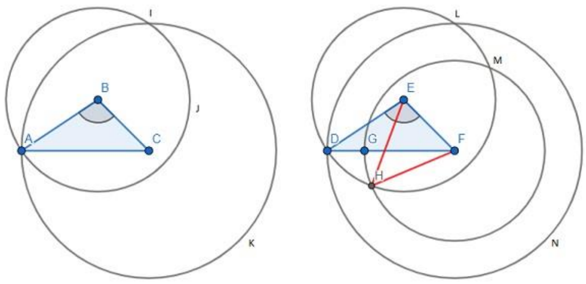


Figura 6

Prova: Por hipótese AB=DE, BC=EF e ∠ABC=∠DEF. Suponhamos, contrafactualmente, que as bases AC e DF não fossem iguais. (Aqui agora inicia o raciocínio por *reductio*). Suponhamos que as bases são diferentes. Sem perda de generalidade, suponhamos que DF fosse maior que AC. Seja FG, igual a AC, cortado de FD segundo a Prop I.3†. Construímos os círculos AIJ de centro B e raio BA e DHL de centro E e raio ED. Esses dois círculos deveriam ser iguais por isotopia, uma vez que assumimos que seus raios são iguais. Construímos os círculos AIK de centro C e raio CA e GHM de centro F e raio FG. Os círculos AIK e GHM também deveriam ser iguais por isotopia, uma vez que cortamos FG=AC. Como EH=ED e ED=AB, então AB=EH. Por hipótese, FG=AC, mas FH=FG, logo FH=AC. Assim, os triângulos ABC e HEF teriam lados iguais, uma vez que assumimos que BC=EF. Por conseguinte, ∠ABC=∠HEF, pela Nova Prop I.4†. Por hipótese, ∠DEF=∠ABC. Logo, ∠HEF, parte própria de ∠DEF, seria igual ∠DEF, o que é uma contradição, pela Noção Comum 5. Portanto, a hipótese de que AC e DF seriam diferentes é incorreta, e assim as bases são iguais, ou seja, AC=DF. Finalmente, pela Nova Prop. I.4†, os ângulos correspondentes nos triângulos ABC e DEF são iguais. Ou seja, os triângulos são iguais.

Qed

Essas provas foram livremente inspiradas pela prova de R.J.Wagner de I.4 e repousam de modo necessário sobre duas pressuposições não explicitamente formuladas no texto de Euclides, segundo a reconstrução de Heiberg, mas que podem até certo ponto ser arguidas como implicitamente presentes.

A primeira e mais importante é a de que uma construção ou algoritmo de construção produz sempre os mesmos resultados para os mesmos dados de partida pelo fato das construções serem feitas em um espaço homogêneo, isotópico. Como vimos, a

não se mostraria mais convincente que o raciocínio direto dado acima. A *reductio* que pode ser efetuada sobre a comparação de triângulos virá na Nova Prop. I.5 a seguir.

hipótese interpretativa envolvendo a homogeneidade tem frequentado a mente de alguns intérpretes da *Geometria de Euclides*, como Levi, embora a interpretação acabe por derivar para uma *Geometria Euclidiana*.

Sob esta base, a da homogeneidade, foi acima provada a igualdade dos triângulos ABC e DEF na NOVA PROP. I.5.

A segunda é a de que o conceito de algoritmo se torna central na interpretação dOS ELEMENTOS que estamos propondo e isso requereria uma justificativa.

Acreditamos que a justificativa é muito natural se adotamos uma interpretação com base em problemas, o que não significa que do ponto de vista histórico a questão esteja solucionada. Em particular, toda vez que mencionamos a homogeneidade do espaço, o POST. 4 deve estar sendo usado de algum modo, pois é ele que está relacionado à homogeneidade. Não espanta, inclusive, que possamos provar que quaisquer dois ângulos retos são idênticos a partir de umas poucas *propositiones* subsequentes no LIVRO I. Segundo nossa perspectiva, essa propriedade já estaria de algum modo presente e involucrada na prova dos primeiros teoremas do LIVRO I. Assim, deve haver um uso essencial do conteúdo do POST. 4 em alguma(s) dessa(s) prova(s), embora o texto de Heiberg não o registre, lembrando que esse texto tem caráter hipotético.[38]

Todavia, é ainda preciso esclarecer a justificação do passo envolvendo o POST. 4 quando preferimos utilizar a expressão *isotopia*. Já havíamos sublinhado o fato de que marcamos com uma adaga (†) os usos das justificações da forma "pelo POST. X" na prova da NOVA PROP. I.4. Também marcamos as justificações da forma "pela PROP. I.Y" na prova da NOVA PROP I.5. Nos dois casos isso foi feito para chamar a atenção de que uma mesma forma de interpretar essas justificativas deveria ser adotada. Lembramos que o texto grego original não apresenta essas justificativas. É somente com as traduções contemporâneas do texto que elas são interpoladas a ele. Desde nosso ponto de vista, o da leitura de problemas, elas deveriam ser lidas do seguinte modo: *o problema atual se reduz ao problema postulado ou ao problema anterior (ainda que de modo parcial)*. Mas isso pode ainda ser dito da seguinte forma mais detalhada: *a solução de um problema no qual se empregaram problemas de construção ou de demonstração já resolvidos significa que qualquer combinação de soluções a esses últimos implicará a virtual posse de uma solução ao primeiro*. Finalmente, o termo isotopia faz referência a toda a classe de soluções ao problema do POST. 4. Assim, qualquer que seja a solução adotada, o resultado deverá ser sempre o mesmo, pois obteremos uma mesma construção usando o mesmo procedimento de solução qualquer que seja ele. Reafirmando mais uma vez nossa leitura do POST. 4 como problema, ela é a seguinte: *Como garantir que os ângulos retos na superfície de trabalho serão sempre iguais?* Toda a classe de soluções compartilhará da mesma propriedade. A classe no caso é a das superfícies de trabalho isotópicas.

A atuação do geômetra produzirá sempre o mesmo resultado independente de qual seja o local, ou *topos* de trabalho. Esse espaço será o plano indefinidamente extensível, já o sabemos. O quinto postulado está a funcionar como critério adicional de seleção. Porém, acerca desse ponto nos pronunciaremos somente em uma publicação futura.

A solução das provas de I.4 e I.8 que aqui estamos propondo através do POST. 4 implicam alguma modificação na ordem de apresentação dos ELEMENTOS DE EUCLIDES. Já indicamos a necessidade de considerar primeiro a prova de I.8 para somente depois proceder com a prova de I.4.[39]

Além disso várias outras consequências se espraiariam sobre o texto hipotético da obra de Euclides. Um deles encontra-se nas definições do LIVRO III. A DEF. III.1

[38] Com efeito, acreditamos que isso seja o caso exatamente na NOVA PROP. I.4.

[39] Curiosamente, Hilbert nos seus *Fundamentos da Geometria* [Hil50] também apresenta como primeiro teorema de congruência justamente o I.8 de Euclides.

estabelece a igualdade de dois círculos: quando eles têm raios ou diâmetros iguais. Todavia, se o texto original de Euclides de fato incluía essa definição, como ela vem posta no LIVRO III, então tornar-se-ia mais problemático sustentar a leitura de problemas proposta mais acima para o POST. 4, uma vez que o conteúdo dessa definição é obviamente consequência desse postulado na interpretação que dele fazemos.

Não pretendemos solucionar essas questões históricas aqui, pois o tema requer o esforço de muitos e mesmo assim não é claro que se possa obter alguma resposta com a qual a maioria da comunidade de historiadores fique satisfeita. Observamos, no entanto, que alguns comentadores consideram estranha a presença da DEF. III.1 no terceiro livro, pois entendem que deveríamos demonstrar que a igualdade de diâmetros implica a igualdade dos círculos. Afinal, é mais ou menos isso foi feito com os triângulos no LIVRO I, pelo menos com o texto que recebemos da tradição, para dois triângulos dos quais supúnhamos que seus lados eram iguais dois a dois em I.8. Porque para os círculos adotar-se-ia outro procedimento que é mais que um *fiat*, já que vem dado por definição? Mais curioso, todavia, adiante ainda no mesmo livro a PROP. III.24 voltaria supostamente a empregar o método de sobreposição para provar que dois segmentos de círculo similares são iguais. Bem mais fácil seria oferecer como definição a igualdade de segmentos de círculos similares para em seguida provar a igualdade dos círculos a partir dessa definição, uma vez que o diâmetro corta o círculo em dois segmentos similares. Assim o problema da sobreposição bem poderia ser completamente eliminado do LIVRO III.

5) Conclusão

A *Geometria de Euclides* é aqui interpretada como uma coleção de problemas. Dentre eles, os problemas de construção requerem um procedimento de (re)solução. O procedimento se reduz em última análise basicamente aos problemas POSTS. 1, 2 E 3. Desde a perspectiva adotada, o POST. 4 funciona como uma espécie de chave de seleção, determinando as características da área de trabalho do geômetra. Em outros termos, qualquer que seja a solução ao problema posto, ela implicará homogeneidade da área de trabalho, no sentindo de constância do produto para os mesmos processos de produção. O procedimento de resolução, mais do que o *diagrama* resultante, é o que primariamente se quer designar com o termo *construção*. O diagrama é o traço, o produto, e apenas uma construção em sentido secundário. Assim, com a nossa interpretação estamos a propor que sob o POST. 4 qualquer que seja a sequência de ações que o geômetra efetue a partir dos POSTS. 1, 2 E 3, deverá ser considerada como a aplicação de um mesmo procedimento se as únicas variações forem de posição no espaço e no tempo de sua realização, sendo a classe dos objetos gerados por essas ações objetos iguais sempre que os parâmetros iniciais da ação sejam iguais.

A homogeneidade de que falava Levi, conforme destacado acima, traduz-se em nosso contexto no princípio de constância do procedimento, da construção como algoritmo, cuja identidade varia em termos de posição, do tempo, do conjunto de ações e sua organização. Uma vez que podemos identificar os procedimentos quando eles não diferem pelas ações e sua organização, sob determinadas condições também seus produtos serão iguais. Estamos usando o termo *isotopia* para designar a classe de soluções ao POST. 4. Essa classe contêm aquelas superfícies para as quais é indiferente a posição e o momento em que um mesmo procedimento é executado, já que ele sempre gerará objetos iguais. Assim, o POST. 4 também entra nas construções, mas apenas como garantia de constância dos procedimentos.

Ao tratar a *Geometria de Euclides* como uma coleção estruturada de problemas, estamos dando ao mesmo tempo relevância ao conceito de ação intimamente imbricado com o conceito de problema. As soluções aos três primeiros postulados são ações, e isso vem indicado no texto grego pelo uso do verbo no infinitivo.

Com base nessa perspectiva propusemos mais acima uma reinterpretação do famoso problema da continuidade apontada por inúmeros autores sobre a construção do triângulo equilátero na PROP. I.1 e procuramos mostrar como os dois teoremas de congruência I.4 E I.8 podem ser provados sem se fazer apelo algum à sobreposição de figuras, portanto só com os elementos já disponíveis nas definições, postulados e noções comuns do LIVRO I. As provas, por sua vez, exigem um reordenamento dos teoremas sendo mais simples realizar primeiro a prova de I.8 e, depois, a partir desta, a prova de I.4. Logo, desde a perspectiva proposta, o texto de Euclides deveria ter uma outra ordem de apresentação das *propositiones*, consequência que certamente nos envolve em belas dificuldades, desde o ponto de vista histórico.

Uma vez que as demonstrações de ambos teoremas se tornam muito simples, fomos levados a levantar a hipótese de que talvez a noção de problema e a noção de procedimento efetivo bem poderiam ter estado no âmago da matemática desde seus primórdios, mas esse é um tema a ser melhor investigado.

Se aquele for de fato o caso, isso poderia ter sido obscurecido ao longo do tempo pela interpretação platônica dos objetos da geometria e a primazia que acabou sendo dada a essa interpretação idealizante. E mesmo que a questão seja bastante polêmica, parece claro que o programa de interpretação da *Geometria de Euclides* baseado em problemas é por si só suficientemente instigante como para ser levado a cabo independente de qualquer correspondência histórica. Todavia, é preciso ressaltar, com a interpretação de problemas uma outra ontologia, diferente da platônica, deve ser considerada. Mas, isso não fizemos aqui, deixando o tema para uma futura dissertação.

Procuramos no texto apontar que os diagramas são eles mesmos os objetos da geometria segundo a interpretação proposta. E os objetos que podem entrar na construção de um diagrama são eles mesmos altamente regimentados. Eventualmente, alguns objetos selvagens poderão ser considerados, mas isso se dará sobretudo no caso do uso de hipóteses contrafactuais, onde então a imaginação está livre para produzir os desenhos geométricos mais exóticos comparados àqueles dados nas definições e postulados de Euclides.

Ao falar de diagramas como objetos da *Geometria de Eucides* também devem ser admitidos para fins de comunicação o uso de outros desenhos ou esquemas que não necessariamente estarão exatamente de acordo com as definições e os postulados, mas servirão para ilustrar alguma descrição. Esses desenhos são aquilo que usualmente designaríamos pelo termo *croquis*. Em boa parte dos manuscritos históricos contendo exposições da *Geometria de Euclides* os desenhos que acompanham as *propositiones* são na verdade croquis de diagramas, feitos inclusive à mão livre.

Conjecturamos que a interpretação de problemas oferece as bases de um novo programa de pesquisa. Pois, do mesmo modo que Hilbert formulou a *Geometria Euclidiana* de maneira inteiramente baseada em teoremas, ao propor a reformulação baseada inteiramente em problemas, estaríamos não só oferecendo uma nova perspectiva para o desenvolvimento da ciência matemática, mas sobretudo uma nova perspectiva epistemológica para a abordagem da ciência de modo geral, assim como para a abordagem das mais variadas tecnologias: a Teoria de Problemas.

Nosso trabalho é apenas um primeiro passo na exploração epistemológica do conceito de problema.

Bibliografia

[Alv23] C. Álvarez J., *La geometría de la congruencia, ensayos sobre Euclides*, v. 1, UNAM, 2023.

[Axw18] A. Axworthy, *The debate between Peletier and Clavius on superposition*, Historia Mathematica, 45:1--38, 2018.

[Bic09] *Os Elementos de Euclides*, tradução de I. Bicudo, UNESP, 2009.

[Esq13] O. Esquisabel e F. Sautter (orgs.), *Conocimiento simbólico y conocimiento gráfico*, História y Teoria, CEFEP, v.113, Buenos Aires, 2013.

[Fit07] *Euclid's elements of geometry: the greek text of J.L.Heiberg (1883–1885)*, edição e tradução de R. Fitzpatrick, 2008, https://farside.ph.utexas.edu/books /Euclid/Elements.pdf.

[Hea21] T. L. Heath, *A history of greek mathematics*, v. 1, Oxford, 1921.

[Hea56] *The thirteen books of Euclid's elements: translated from the text of Heiberg*, v. 1, Introdução e comentários de Sir Thomas L. Heath, Dover, 1956.

[Vit90] *Les éléments: traduits du text de Heiberg*, v. 1: Livres I à IV, Tradução e comentários de B. Vitrac, PUF, 1990.

[Har03] O. Harari, *The concept of existence and the role of constructions in Euclid's Elements*, Archive for History of Exact Sciences, 57:1-23, 2003.

[Hil50] D. Hilbert, *The foundations of geometry*, Tradução de E. J. Townsend, The Open Court, 1950.

[Katz22] E. Katz, *Aristotle's philosophy of geometry: a philosophical defence*, Oxford Studies in Ancient Philosophy, v. 61, p. 143-200, 1922.

[Kno45] W. R. Knorr, *The ancient tradition of geometric problems*, Birkheuser, 1986.

[Kol91] A. N. Kolmogorov, *On the interpretation of intuitionistic logic*, Selected Works of A.N. Kolmogorov, v. I, tradução de V. M. Volosov, Kluwer, 1991.

[Lev06] B. Levi, *Leyendo a Euclides*, Libros del Zorzal, 2006.

[Las19] A. Lassalle-Casanave, *Por construção de conceitos: em torno da filosofia kantiana da matemática*. Puc-Rio/Loyola, 2019.

[Man95] K. Manders, *The Euclidean diagram*, The Philosophy of Mathematical Practice, ed. P.Mancosu, p. 80-133, OUP, 2008.

[Max63] E.A. Maxwell, *Fallacies in mathematics*, Cambridge Press, 1963.

[Mue81] I. Mueller, *Philosophy of mathematics and deductive structure in Euclid's elements*, MIT, 1981.

[San12] W.C. Sanz, *Kolmogorov e a lógica de problemas I*, Notae Philosophicae Scientiae Formalis, v. 1, n. 2, p. 184 - 197, GCFCF, 2012, https://www.researchgate.net /publication/379732611\underline{\space}Kolmogorov\underline{\space}e\underline{\space}a\underline{\space}Logica\underline{\space}de\underline{\space}Problemas\underline{\space}I.

[San21a] W. C. Sanz, *Euclidean machines: general theory of problems*, In E. H. Haeusler et alii (eds.), A Question is More Illuminating than an Answer: A Festschrift for Paulo A.S. Veloso}, pp. 236--260, College Publications, 2021.

[San_21b] W. C. Sanz, *Cálculo de problemas e teoria de problemas*, In G. D. Secco et alii (eds.), De Mathematicae atque Philosophiae Elegantia: Notas Festivas para Abel Lassalle Casanave}, pp. 214--237, College Publications, 2021.

[San24] W. C. Sanz, *Kolmogorov and the general theory of problems*, in T. Piecha and K.F.Wehmeier (eds.), Peter Schroeder-Heister on Proof-Theoretic Semantics}, pp. 162-192, Springer, 2024, https://library.oapen.org/bitstream/handle /20.500.12657/88357/ 978-3-031-50981-0.pdf?sequence=1\&isAllowed=y.

[Seo22] J. Seoane, *Estilo polimodal en la demostración euclidiana*, Dianóia, v.67, n.89,

2022.
[Sid18] N. Sidoli, *Use of constructions in problems and theorems in Euclid's Elements*, Archive for History of Exact Sciences, 72:403–452, 2018.
[Wag83] R. J. Wagner, *Euclid's intended interpretation of superposition,* Historia Mathematica, 10:63--70, 1983.